Transformation de Laplace

Notation:
on notera par: $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ l'espaces des fcts mesurables localement intégrables c-à-d: $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}) = \{f \text{ mesurable} / \int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty, a,b \in \mathbb{R}\}$

Définitions:
Soit une fct : on dit que f est causale si $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
Si f n'est pas causale on peut construire $g(x) = f(x)\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$
et comme ça on aura que g est causale

Définition: Soit f une fct causale $(c\text{-}à\text{-}d\ f(x)=0 \ \forall x<0\}$
on définit la transformation de Laplace de f:

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \qquad p \in \mathbb{C}$$

lorsque $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ converge

(ou bien lorsque $t \longmapsto e^{-pt} f(t)$ intégrable on a $|e^{-pt} f(t)| = |e^{-\mathrm{Re}\,p\,t}\, e^{-i\,\mathrm{Im}\,p\,t}\, f(t)| = e^{-t\,\mathrm{Re}\,p}\,|f(t)|$

donc $e^{-pt} f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \iff e^{-t\,\mathrm{Re}(p)} f(t) \in L^1\mathbb{R}$)

Définition:
Soit f une fonction causale. On appelle abscisse de convergence le réel

$$p_0 = \inf\{p \in \mathbb{R}_+ / e^{-pt} f(t) \in L^1\mathbb{R}\}$$

Exercice:
Soit $H(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ et $f(x) = x^n H(x)$; $g(x) = e^{iax} H(x)$

-1- Calculer l'abscisse de convergence de f et g
-2- Calculer leurs transformation de Laplace respective
-3- En déduire $\mathcal{L}(\cos(ax) H(x))(p)$ et $\mathcal{L}(\sin(ax) H(x) H(x))(p)$
on appelle $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$

Réponse:
-1- on a: $e^{-pt} f(t) = e^{-pt} t^n H(t) \overset{?}{\in} L^1(\mathbb{R})$

on a $\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n H(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n\,dt = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-y}\left(\frac{y}{p}\right)^n dy$

soit $y = pt \Rightarrow t = \frac{y}{p}$, $dt = \frac{dy}{p}$

$= \frac{1}{p^{n+1}}\int_0^{+\infty} y^n e^{-y}\,dy$

$= \frac{1}{p^{n+1}}\Gamma(n+1) < \infty$, $n+1 > 0$, $n > -1$

$= \mathcal{L}(f)(p)$

d'où l'abscisse de convergence de f est $p_0 = -1$

Et: $\mathcal{L}(x^n H(x)) = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$, $n > -1$

- 2 - Soit $g(x) = e^{iax} H(x)$; $\int_0^{+\infty} g(x) e^{-px}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{iax} e^{-px}\,dx$

$= \int_0^{+\infty} e^{x(ia-p)}\,dx$

on a $|e^{x(ia-p)}| = |e^{iax} e^{-px}|$

$= |e^{-x\,Re\,p}\, e^{i(ax - Im\,p)}| = e^{-x\,Re(p)} \in L^1(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow Re\,p > 0$

d'où l'abscisse de convergence $p_0 = 0$

on a $\mathcal{L}(e^{iax}H(x))(p) = \int_0^{+\infty} e^{iax} e^{-px}\,dt = \frac{1}{ia-p}\left[e^{x(ia-p)}\right]_0^{+\infty}$

$= \frac{1}{p-ia} = \frac{p+ia}{p^2+a^2} = \frac{p}{p^2+a^2} + i\frac{a}{p^2+a^2}$ et d'autre part, on a:

$\mathcal{L}(e^{iax}H(x))(p) = \mathcal{L}(\cos(ax)H(x))(p) + i\,\mathcal{L}(\sin(ax)H(x))(p)$

d'où $\mathcal{L}(\cos(ax)H(x))(p) = \frac{p}{p^2+a^2}$ et $\mathcal{L}(\sin(ax)H(x))(p) = \frac{a}{p^2+a^2}$

Théorème (Page 3)

Remarque:

$g(p) = \mathcal{L}(f)(0)$ est dite l'image de f par $\mathcal{L}$.

f est appelé l'origine de $g(p)$ par $\mathcal{L}$.

Propriétés :

Soit f et g deux fcts causale dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$, alors on a

$$\mathcal{L}(f*g)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \cdot \mathcal{L}(g)(p)$$

Preuve :

on a d'après la définition des produit de convolution $*$

$$\mathcal{L}(f*g)(p) = \int_0^{+\infty} (f*g)(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(t-y)\, dy \right) e^{-pt}\, dt$$

(on vérifie du théorème de Fubini)

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(y)\, g(t-y)\, e^{-pt}\, dy\, dt$$

Soit le chgt de variable $x = t - y$; $t = x + y$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(y)\, g(x)\, e^{-p(x+y)}\, dx\, dy = \int_0^{+\infty} f(y)\, e^{-py}\, dy \int_0^{+\infty} g(x)\, e^{-px}\, dx$$

$$= \mathcal{L}(f)(p)\, \mathcal{L}(g)(p)$$

Propriétés :

Soit f une fct et causale dans $L^1(\mathbb{R})$

1- $\mathcal{L}(f(x-a))(p) = \mathcal{L}(\tau_a f)(p)$; $a > 0$

(avec $\tau_a f(x) = f(x-a)$) $= \int_0^{+\infty} \tau_a f(x)\, e^{-px}\, dx$

$$= \int_0^{+\infty} f(x-a)\, e^{-px}\, dx$$

soit $y = x - a \longrightarrow$ $= \int_0^{+\infty} f(y)\, e^{-p(y+a)}\, dy$

$= e^{-pa} \int_0^{+\infty} f(y) e^{-py} dy = e^{-pa} \mathcal{L}(f)(p)$

-2- $\mathcal{L}(e^{ax} f(x))(p) = \int_0^{+\infty} e^{+ax} f(x) e^{-px} dx$

$= \int_0^{+\infty} e^{-x(p-a)} f(x) dx$

$= \mathcal{L}(f)(p-a)$

-3- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$; $\mathcal{L}(f(ax))(p) = \int_0^{+\infty} f(ax) e^{-px} dx$

soit le chgt de variable $y = ax \Rightarrow x = \frac{y}{a} \Rightarrow dx = \frac{dy}{a}$

$\mathcal{L}(f(ax))(p) = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(y) e^{-p\frac{y}{a}} dy = \frac{1}{a} \mathcal{L}(f)\left(\frac{y}{a}\right)$

Théorème :

-1- Soit f une fct causale dans $L^1(\mathbb{R})$ tq $f \in C^n(\mathbb{R})$

alors on a $\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n \mathcal{L}(f) - p^{n+1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \dots - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n+1)}(0^+)$

avec $f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

-2- Soit f une fct causale dans $L^1(\mathbb{R})$ tq $t \longmapsto t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$,

alors $\mathcal{L}^{(n)}(f)(p) = \frac{d^n}{dp^n}(\mathcal{L}(f))(p) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t))(p)$

Exercice :

Calcule la transformation de Laplace de :

$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$f_1(x) = (x^2 + 1) H(x)$; $f_2(x) = x^3 \cos(x) H(x)$

$f_3(x) = e^{-x} \sin^2 x H(x)$; $f_4(x) = e^{-2x}(1+x^3) H(x)$

$$f_5(x) = \left(3\,ch(5x) - 4\,sh(x)\right) H(x)$$

avec $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Reponse :

- $\mathcal{L}(f_1)(p) = \mathcal{L}(x^2 H(x))(p) + \mathcal{L}(H)(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p}$

- $\mathcal{L}(f_2)(p) = \mathcal{L}(x^3 \cos(x) H(x))(p) = (-1)^3 \mathcal{L}^{(3)}(\cos(x) H(x))(p)$

$= -\left(\frac{p}{p^2+1}\right)^{(3)}$ à faire à la maison.

$\mathcal{L}(e^{-x} \sin^2(bx) H(x))(p) = \mathcal{L}(\sin^2 x\, H(x))(p+1)$

$\cos^2(x) + \sin^2 x = 1$

$\cos x^2 - \sin^2 x = \cos(2x)$

$2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$\mathcal{L}(e^{-x} \sin^2(x) H(x))(p) = \frac{1}{2}\mathcal{L}((1 - \cos 2x) H(x))(p+1)$

$= \frac{1}{2}\mathcal{L}((1)(p+1) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(\cos(2x) H(x))(p+1)$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2}\frac{p+1}{(p+1)^2 + 4}$

$\mathcal{L}(f_4)(p) = \mathcal{L}\left((1+x^3) H(x)\right)(p+2)$

$= \mathcal{L}(H)(p+2) + \mathcal{L}(x^3 H(x))(p+2)$

$= \frac{1}{p+2} + \frac{6}{(p+2)^4}$

$\mathcal{L}(f_5)(p) = \mathcal{L}\left(\frac{-1}{2} e^{5x} H(x) + \frac{7}{2} e^{-5x} H(x)\right)(p) =$

$= -\frac{1}{2}\mathcal{L}(H)(p-5) + \frac{7}{2}\mathcal{L}(H)(p+5)$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{p-5} + \frac{7}{2}\frac{1}{p+5}$

Transformation de Laplace

Nadia Sraieb

École Nationale d'Ingénieur de Gabes
Département GCR-GCP
Omar Ibn Khattab Street 6029 Gabes, Tunisia
e-mail: nadia.sraieb@fsg.rnu.tn/sraieb.nadia@yahoo.fr

Keywords: *Transformation de Laplace*

1 Introduction

On identifira au sous espace vectoriel $L^1_{loc}(\mathbb{R})$(l'espace vectoriel des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$), nulles sur $\mathbb{R}^*_-$.
Dans ce cours, on considère que les fonctions sont nulles pour $x < 0$. Ce type de fonction sont appelées des **fonctions causale**.
Et pour les fonctions f non nulle sur $\mathbb{R}_-$, il suffit de considrer $g(x) = H(x)g(x)$, H étant la fonction de Heaviside, pour obtenir la fonction correspondante.

Definition 1.1. *Soit f une fonction à variable réelle ou complexe, la transformation de Laplace bilatérale de f,lorsqu'elle existe, est la fonction à variable réelle ou complexe p définit par l'intégrale:*

$$\mathcal{L}(p) = \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

Remarque 1.1. *f est appelé l'origine et $\mathcal{L}$ est l'image de la fonction f.*

Definition 1.2. *La transformation de Laplace unilatérale d'une fonction causale f est la fonction $\mathcal{L}f$ de la variable réelle ou complexe p définie par*

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{1.1}$$

Remarque 1.2.
1. *On remarque dans le cas de la transformation de Laplace unilatérale, seule la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ intervient dans la définition. On peut toujours rendre une fonction causale, c'est en la multipliant par la fonction Heaviside.*
2. *Pour que $\mathcal{L}f$ existe, il faut que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}dt$ soit convergente*

Exemple
Vérifions que la fonction $f(t) = \frac{1}{t}H(t)$ n'admet pas de transformation de Laplace.

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}e^{-pt}dt = \int_0^1 \frac{1}{t}e^{-pt}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}e^{-pt}dt$$

CamScanner

Sur l'intervalle $[0,1]$, $e^{-pt} \geq e^{-p}$, si p est réel positif, donc

$$\int_0^1 \frac{1}{t} e^{-pt} dt \geq e^{-p} \int_0^1 \frac{1}{t} dt$$

Cette dernière intégrale diverge et ainsi $\mathcal{L}f(p)$ n'existe pas.

Definition 1.3. *On dit que f est à croissance exponentielle d'ordre p s'il existe $A, B > 0$ tels que,*

$$\forall x \geq A, |f(t)| \leq Be^{pt}.$$

Exemple • Les fonctions polynômes et les fonctions de la forme $f(t) = ae^{at}$ sont d'ordre exponentielles.
• la fonction $f(t) = e^{t^2}$ n'est pas d'ordre exponentielle.
en effet : on a $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$e^{at} e^{t^2} = e^{t^2+at}$$

et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{t^2+at} = +\infty$

Théorème 1.1. *si f est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'ordre exponentielle alors elle admet une transformée de Laplace bien définie pour tout $p \in \mathbb{C}$ telle que $\Re e(p) > a$ (où a vérifie $|f(t)| \leq Ce^{at}$, $c > 0$ et $\forall\, t \geq t_0$.).*

Preuve Soit $t_0 > 0$. Il existe $C > 0$, $a \in \mathbb{R}$ tel que l'on a

$$|f(t)| \leq Ce^{at}, \ \forall\, t \geq t_0.$$

Parsuite, pour tout $t \geq t_0$, on obtient

$$\begin{aligned} |f(t)e^{-st}| &= |f(t)|e^{-\Re e(s)t} \\ &\leq Ce^{-(\Re e(s)-a)t}. \end{aligned}$$

D'où la convergence de l'intégrale $\int_{t_0}^{+\infty} |f(t)e^{-st}|dt$, $\forall\, \Re e(s) > a$. C e qui entraine la convergence de l'intégrale $\int_{t_0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$, $\forall\, \Re e(s) > a$.

Or puisque $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ alors $\int_0^{t_0} f(t)e^{-st}dt < +\infty$.
Donc,

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{t_0} f(t)e^{-st}dt + \int_{t_0}^{+\infty} |f(t)e^{-st}|dt < +\infty, \ \forall\, \Re e(s) > a.$$

Ce qui fallait démontrer.

Puisque l'existance de la transformation de Laplace exige que

$$t \mapsto e^{-xt}|f(t)| \in L^1(\mathbb{R}^+)$$

on introduira, alors la notion d'abscisse de convergence absolue ou appelée encore l'abscisse de sommabilité.

CamScanner

Definition 1.4. *On appelle abscisse de convergence absolue ou abscisse de sommabilité, le réel x_0 telle que*
$x_0 = \inf\left\{x \in \mathbb{R}_+ : \ e^{-xt}|f(t)| \in L^1(\mathbb{R}^+)\right\}$.

Ici, on remarque bien la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ pour $\Re e(s) > x_0$ alors que cette convergence n'est pas vérifié lorsque $\Re e(s) < x_0$.

Exemple La fonction échelon-unité ou Heaviside, définie par

$$H(x) = 1, \ x \geq 0; \ \ H(x) = 0, \ t < 0.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(p) &= \int_0^{\infty} H(x)e^{-px}dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \end{aligned}$$

pour que $\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt$ soit convergente il faux que $\lim_{t\to+\infty} e^{-pt} = 0$ ce qui implique que $\lim_{t\to+\infty} |e^{-pt}| = 0$. Comme $p \in \mathbb{C}$, alors $|e^{-pt}| = e^{-Rel(p)t}$. Donc

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-Rel(p)t} = 0 \ \text{ si et seulement si } \ Rel(p) > 0.$$

Par suite $\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt$ est convergente si et seulement si $Rel(p) > 0$. Alors l'abscisse de convergence absolue de la fonction Heaviside H est $p_0 = 0$. Dans la suite un calcul simple donne

$$\mathcal{L}H(p) = \frac{1}{p}, \ \ \forall p \in \mathbb{C}, \ \ Rel(p) > 0.$$

Exemple
Posons $f(t) = e^{it}$, on a

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} e^{it}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{(i-p)t}dt$$

avec

$$\lim_{t\to+\infty} |e^{(i-p)t}| = \lim_{t\to+\infty} e^{-Relp} = 0 \Leftrightarrow Relp > 0.$$

Ainsi

$$\mathcal{L}(e^{it})(p) = \frac{1}{p-i}, \ \ \forall \ Relp > 0$$

Il sera simple de vérifier la relation entre les deux transformations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{L}$, donnée dans ce théorème.

Théorème 1.2. *(La relation entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{L}$)*
Soit f une fonction causale, telle que: si $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, alors $\mathcal{F}f(y) = \mathcal{L}f(iy2\pi)$, ou encore $\mathcal{F}f(\frac{y}{2\pi}) = \mathcal{L}f(iy)$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$.

La preuve est évidente.

$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$, $p = 2i\pi y$

$\mathcal{F}f(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi yt} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-2i\pi yt}$; pour $y = \frac{-ip}{2\pi}$

$\mathcal{F}f\left(\frac{p}{2\pi}\right) = \mathcal{L}(f)(-ip)$ ou encore (3) $\mathcal{F}f(y) = \mathcal{L}(f)(2i\pi y)$

2 Quelques exemples

1. **Transformée de Laplace de l'échelon unité** $(t \mapsto H(t))$ La transformée de Laplace de l'échelon unité est définie pour $p \in \mathbb{C}$ avec $Relp > 0$ et on a

$$\mathcal{L}H(p) = \mathcal{L}(H(t))(p) = \frac{1}{p}$$

2. **Transformée de Laplace de la fonction rampe** $t \mapsto t \times H(t)$ La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour pour $p \in \mathbb{C}$ avec $Relp > 0$ et on a

$$\mathcal{L}(t \times H(t))(p) = \frac{1}{p^2}$$

3. **Transformée de Laplace de la fonction** $t \mapsto t^n \times H(t)$, $n \in \mathbb{N}$ La transformée de Laplace de la fonction $(t \mapsto t^n \times H(t))$ est définie pour $p \in \mathbb{C}$ avec $Relp > 0$ et on a

$$\mathcal{L}(t^n \times H(t))(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

preuve Calculons la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto t^n \times H(t)$ intégrant par parties:

$$u = t^n, \quad dv = e^{-pt}dt, \quad du = nt^{n-1}dt, \quad v = -\frac{1}{p}e^{-pt}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^n \times H(t))(p) &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt \\ &= \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}t^n\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-pt}dt\end{aligned}$$

Les valeurs de la première intégrale sont nulles à chaque borne, la valeur de la seconde est celle de la transformée de $t \mapsto t^{n-1} \times H(t)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^n \times H(t))(p) = \frac{n}{p}\mathcal{L}(t^{n-1} \times \mathcal{U}(t))(p) &= \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\mathcal{L}(t^{n-2} \times H(t))(p) \\ &= \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}...\frac{1}{p}\mathcal{L}(t^0 \times H(t))(p) \\ &= \frac{n!}{p^n}\mathcal{L}(H(t))(p)\end{aligned}$$

Mais

$$\frac{1}{p}\mathcal{L}(t^0 \times H(t))(p) = \mathcal{L}(H(t))(p) = \frac{1}{p}$$

comme on peut immédiatement le constater.

4. **Transformée de Laplace de la fonction** $t \mapsto e^{at} \times H(t)$, $a \in \mathbb{C}$

La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto e^{at} \times H(t)$ est définie pour $p \in \mathbb{C}$, $Rel(p) > Rel(a)$ et on a

$$\mathcal{L}(e^{at} \times H(t))(p) = \frac{1}{p-a}$$

CamScanner

preuve Calculons la transformée de Laplace de l'exponentielle $f(t) = e^{at} \times H(t)$

$$\mathcal{L}(e^{at} \times \mathcal{U}(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t} dt = \left[\frac{1}{a-p} e^{(a-p)t}\right]_0^{+\infty}$$

avec

$$\lim_{p \to +\infty} \left| \frac{1}{a-p} e^{(a-p)t} \right| = \frac{1}{|a-p|} \lim_{p \to +\infty} e^{(a-Relp)t}$$

Cette dernière limite est nulle si $Relp > a$. Ainsi, la valeur en la borne supérieure n'existe que si $Relp > a$ et vaut alors 0. Alors que la valeur en la borne inférieure vaut $\frac{1}{a-p}$. Ainsi

$$\mathcal{L}(e^{at} \times H(t))(p) = \frac{1}{p-a}, \qquad \text{définie si} \quad Relp > a$$

5. **Transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \sin t \times H(t)$:**

La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \sin t \times H(t)$ est définie pour $p \in \mathbb{C}$, $Rel(p) > 0$ et on a

$$\mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p) = \frac{1}{p^2+1}$$

preuve Calculons $\mathcal{L}(\sin t \times H(t))$ en intégrant aussi par parties :

$$u = \sin t, \quad dv = e^{-pt} dt, \quad du = \cos t dt, \quad v = -\frac{1}{p} e^{-pt}$$

$$\mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p) = \int_0^{+\infty} \sin t e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \sin t \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \cos t e^{-pt} dt$$

Les valeurs de la première intégrale sont nulles à chaque borne, la valeur de la seconde est celle de la transformée de $\sin t H(t)$. Ainsi

$$\mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}(\cos t \times H(t))(p)$$

En intégrant une nouvelle fois par parties, on trouve que

$$\mathcal{L}(\cos t \times H(t))(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p)$$

et

finalement

$$\mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} \mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p)$$

D'où, en résolvant l'équation

$$\mathcal{L}(\sin t \times H(t))(p) = \frac{1}{p^2+1}$$

On établit de même

$$\mathcal{L}(\cos t \times H(t))(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

CamScanner

3 Propriétés de la transformation de Laplace

Proposition 3.1. *Soit f et g deux fonctions causales admettant deux transformation de Laplace respectives $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$ et d'indice de sommabilité respectifs x_0 et y_0, alors ona.*

1. *Linéarité :*
   - *la fonction $f+g$ admet une transformation de Laplace telle que*
   $$\mathcal{L}(f+g)(p) = \mathcal{L}f(p) + \mathcal{L}g(p).$$
   - *Pour tout α appartenant à $\mathbb{R}$ (ou à $\in \mathbb{C}$), on a*
   $$\mathcal{L}(\alpha \times f)(p) = \alpha \times \mathcal{L}f(p)$$
2. *Injectivité :*
   $$si \;\; \mathcal{L}f = \mathcal{L}g \;\; alors \;\; f = g \; p.p.$$
3. $$\lim_{|p|\to+\infty} \mathcal{L}f(p) = 0, \;\; \forall\, p \in \mathbb{C} \; tel \;\; que \; \mathcal{R}ep > x_0.$$

Exemple

1. La transformée de Laplace de la fonction définie par
   $$f(t) = (3t+4)H(t)$$
   est donnée par
   $$\begin{aligned} \mathcal{L}((3t+4)H(t))(p) &= 3\mathcal{L}(tH(t))(p) + 4\mathcal{L}(H(t))g(p) \\ &= \frac{3}{p^2} + \frac{4}{p} \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{it})(p) &= \mathcal{L}(\cos t)(p) + i\mathcal{L}(\sin t)(p) \\ &= \frac{1}{p-i} \\ &= \frac{p}{p^2+1} + i\frac{1}{p^2+1} \end{aligned}$$
   Alors
   $$\mathcal{L}(\cos t)(p) = \frac{p}{p^2+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\sin t)(p) = \frac{1}{p^2+1}$$

Proposition 3.2. *Soit f une fonction causale admettant une transformée de Laplace notée $\mathcal{L}f(p)$ ayant p_0 comme abscisse de convergence absolue, alors on a*

1. ***Phénomène d'amortissement:*** *pour $a \in \mathbb{R}$ la fonction $e^{at}f(t)$ admet une transformée de laplace, son abscisse de convergence absolue est $p_0 + a$ et on a*
   $$\mathcal{L}(e^{at}f(t)H(t))(p) = \mathcal{L}f(p-a), \quad \forall p > p_0 + a.$$

CamScanner

2. ***Changements d'échelles :*** *pour tout $a > 0$, la fonction $f(at)$ admet une transformée de laplace d'abscisse de convergence absolue est ap_0 et on a*

$$\mathcal{L}(f(at)H(t))(p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}f(\frac{p}{a}), \quad \forall p > ap_0.$$

3. ***Phénomène de retatd:*** *Soit $a > 0$, la fonction*

$$\begin{aligned} f_a(t) &= f(t-a)H(t-a) \\ &= \begin{cases} f(t-a) \ \ si \ \ t > a, \\ 0 \ \ sinon \end{cases} \end{aligned}$$

admet une transformée de Laplace son abscisse de convergence absolue est p_0 et on a

$$\mathcal{L}(f_a(t))(p) = e^{-ap}\mathcal{L}f(p), \quad \forall p > p_0.$$

Remarque 3.1. *Pour $a > 0$, on a $\forall t \in \mathbb{R}$,* $\quad H(at) = H(t)$

preuve

1. on a

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)H(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{at}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-a)t}dt = \mathcal{L}f(p-a).$$

2. Par un simple changement de variable $u = at$, on obtient le résultat.

3. On a $\mathcal{L}(f_a(t))(p) = \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt$
   Posons $u = t - a, du = dt$. L'intégrale devient

$$\int_0^{+\infty} f(u)e^{-p(u+a)}du = e^{-pa}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du = e^{-pa}\mathcal{L}f(p).$$

Exemple

1. $\mathcal{L}(e^{2t}t^3H(t))(p) = \mathcal{L}(t^3)(p-2) = \frac{6}{(p-2)^4}$
2. $\mathcal{L}(e^{-3t}\sin tH(t))(p) = \mathcal{L}(\sin t)(p+3) = \frac{1}{(p+3)^2+1}$
3. pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\cos(\alpha t))(p) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(\cos(t))(\frac{p}{\alpha}) = \frac{p}{p^2+\alpha^2}, \\ \mathcal{L}(\sin(\alpha t))(p) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(\sin(t))(\frac{p}{\alpha}) = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2} \end{cases}$$

4. Transformée de Laplace de $f(t) = (t-1)^2$ et $g(t) = (t-1)^2, t \geq 1$:
   Remarquons ici qu'on peut appliquer la proposition précédante (cas de phénomène

CamScanner

de retard) uniquement sur la fonction g et non pas sur f car la fonction f elle retardé par 1 mais elle commence à partie de zéro et non pas de 1.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)H(t))(p) &= \mathcal{L}(t^2-2t+1)(p)\\ &= \mathcal{L}(t^2)(p)-2\mathcal{L}(t)(p)+\mathcal{L}(H(t))(p)\\ &= \frac{2}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}((t-1)^2H(t-1))(p) &= e^{-p}\mathcal{L}(t^2)(p)\\ &= \frac{2e^{-p}}{p^3}\end{aligned}$$

Exemple Cherchons la transformée de la fonction

$$f(t)=\sin(2t-3)H(t-\frac{3}{2})$$

la fonction

$$f(t)=\sin(2(t-\frac{3}{2}))H(t-\frac{3}{2})=g(t-\frac{3}{2})$$

avec $g(t)=\sin(2t)H(t)$
Alors,

$$\mathcal{L}(f(t))(p)=\mathcal{L}(g(t-\frac{3}{2}))(p)=e^{-\frac{3}{2}p}\mathcal{L}(g(t))(p)=\frac{2e^{-\frac{3}{2}p}}{p^2+4}$$

Exemple Calculer la transformée de la fonction

$$g(t)=tH(t-1)$$

La fonction g est égale à une fonction f retardée de 1: $g(t)=f(t-1)$.
Donc la fonction f est égale à g avancée de 1: $f(t)=g(t+1)$.

$$f(t)=g(t+1)=(t+1)H(t)$$

Alors

$$\mathcal{L}(g(t))(p)=e^{-p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)$$

Exemple Calculer la transformée de la fonction

$$f(t)=\sin tH(t-\frac{\pi}{2})$$

La fonction

$$g(t)=f(t+\frac{\pi}{2})=\sin(t+\frac{\pi}{2})H(t)=\cos tH(t)$$

est retardée de $\frac{\pi}{2}$. Le retard implique

$$\mathcal{L}(g(t))(p)=e^{-\frac{\pi}{2}p}\frac{p}{p^2+1}$$

CamScanner